



Examen

Nom :

Prénom :

La note :

Exercice:

Une structure réalisée en béton armé à usage commerciale professionnelle et d'habitation, composé d'un (**R+6**) avec un RDC commerciale, contreventé par des voiles et portique, situé dans la wilaya de **Constantine**, classée selon RPA comme zone de **moyenne sismicité** avec un **site ferme S2**.

- ❖ Largeur totale de la structure 20 m.
- ❖ Longueur totale de la structure 27.80 m.
- ❖ Hauteur : 4 m pour RDC, 1^{er} étage 3,20 et 3,06 pour tous les niveaux.
- ❖ Hauteur totale $H_t = 22.50$ m.

4.2. Pré dimensionnement

Poteau	40x40 / Ø 40	
Poutres	Poutres porteuses : (PP)	40x60 cm ²
	Poutres secondaires: (PS)	40x50 cm ²
Escalier	Poutres palière :	30x30 cm ²
	Paillasse épaisseur	16 cm
	Palier épaisseur	15 cm
Plancher	Plancher à corps creux	16+4
Balcon	Epaisseur	14cm
Voile	Epaisseur	15cm

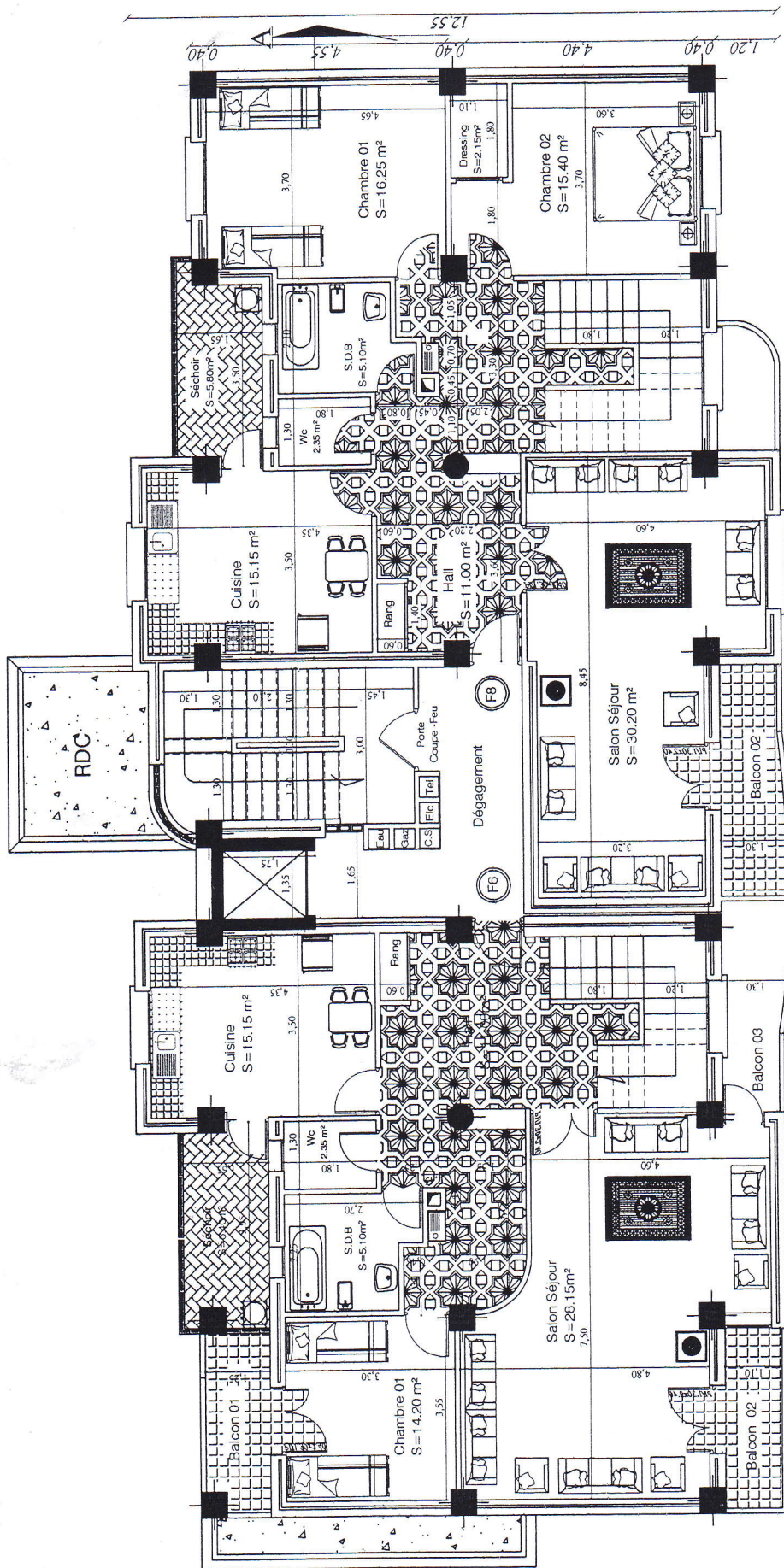
	Charges permanentes	Charges d'exploitation
Plancher terrasse inaccessible :	6.3 kN/m ²	1 kN/m ²
Plancher Etage courant :	5.00 kN/m ²	1.5 kN/m ²
Paillasse	4.31 kN/m ²	2.5 kN/m ²
Palier	1.67 kN/m ²	2.5 kN/m ²
Balcon	1.16 kN/m ²	3.5 kN/m ²

❖ Données générales :

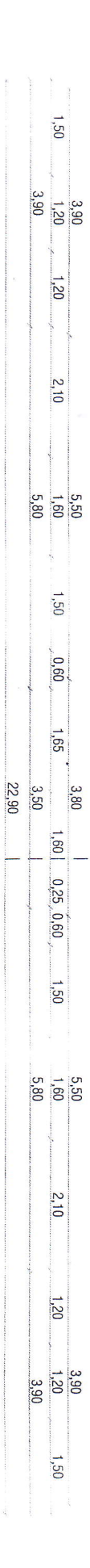
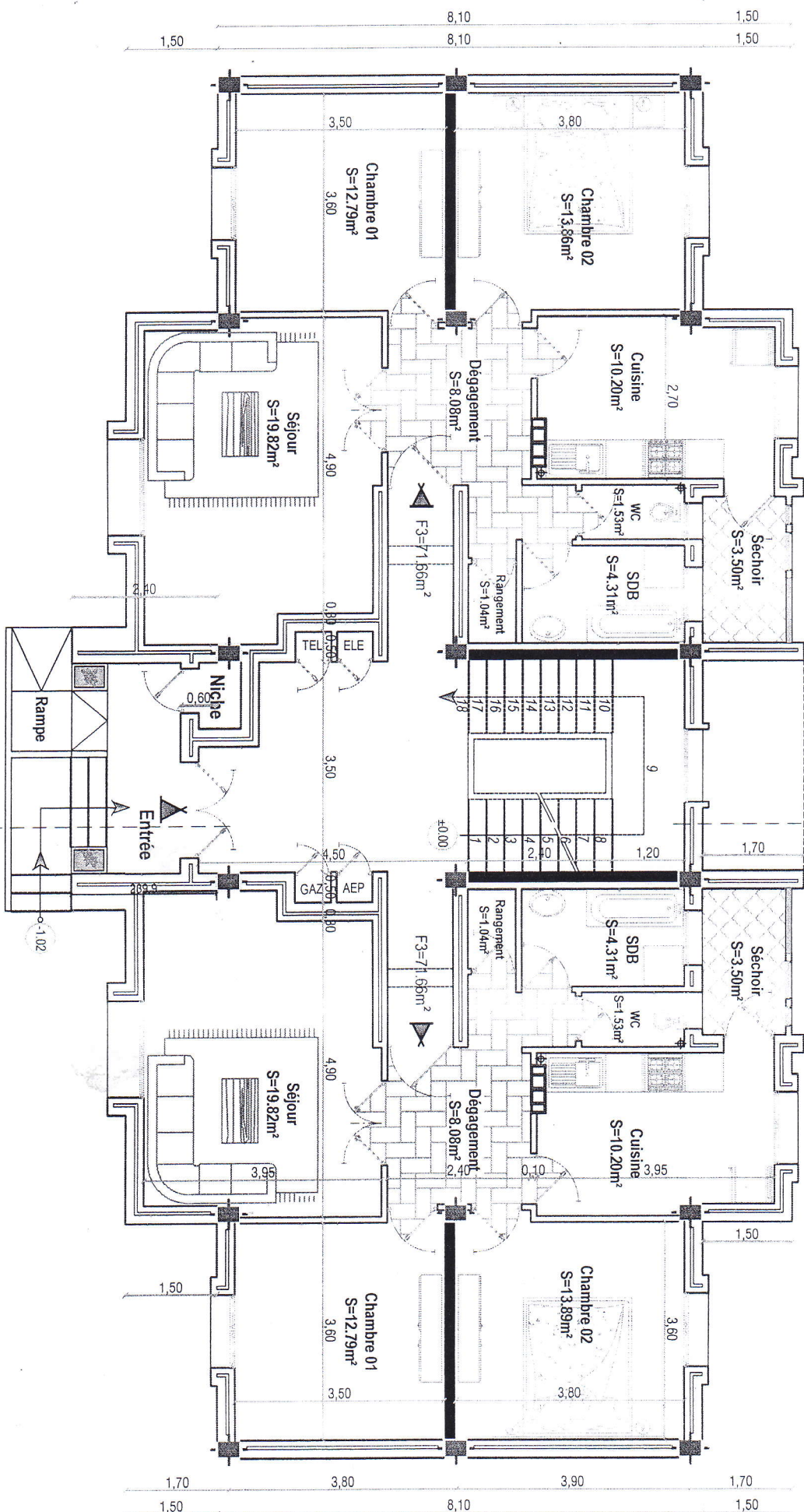
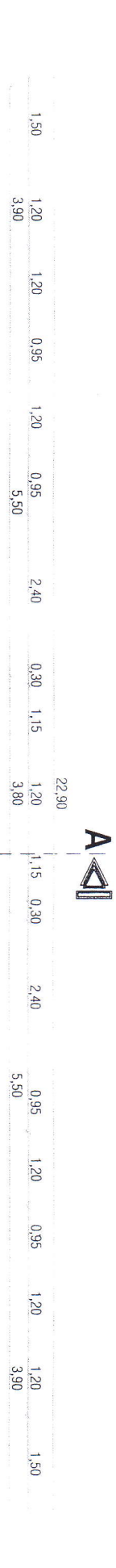
Poids volumique du béton armé	25 kN/m ³
Zone sismique :	zone II
Groupe d'usage :	Groupe 2
Classification du site :	site ferme S2
Béton : Classe de résistance	C25 / 30 $f_{ck} = 30$ MPa
Armatures HA :	Acier E36

27.80

1.20 1.30 2.10 0.60 1.45 0.60 1.50 1.40 3.30 0.40 3.45 0.40 2.90 0.40 1.50 0.40 7.50 0.40 1.40 3.30 0.40 1.50 0.60 1.20 0.60 2.10 1.40 1.35 0.40



PLAN 11eme ETAGE (1er Niv. Duplex) ECH 1/50
-Bloc Barre-





Correction d'examen

Nom :

Prénom :

La note :

Solution :

0,5 Ouvrir Robot Structural Analysis.

Définir le type de la structure à étudier (Sélectionner l'icône Etude d'une coque).

1,5 Réglage des préférences de la tâche.

- Réglage des unités
- Matériaux (béton et acier)
- Réglage des normes (BAEL91, DTR C2-47/NV99, RPA 2003).

9 Modélisation.

- Définition des axes (X, Y, Z).
- Définition de la section

(Poteaux, Poutres_P, Poutres_S, Poutres palière, Voile, Balcon, Dalle, Palier de repos, Paillasse).

- Modélisation des éléments de barres.

(Poteaux, Poutres_P, Poutres_S, Poutres palière)

- Intersection des éléments.
- Modélisation des éléments de section.

(Balcon, Dalle, Palier de repos, Paillasse).

2,5 Chargements.

- Définition des cas de charges G et Q.
- Définition de la charge G et Q.
 - 1- Plancher Etage courant.
 - 2- Balcon.
 - 3- Paillasse
 - 4- Palier

0,5 Création de la liaison rigide.

1 Création des étages

Changement de quelque paramètre.

- 2
- Changement de contour de Plancher terrasse inaccessible.
 - Changement des cas de charges G et Q
 - 1- Plancher terrasse inaccessible.
 - Supprime la poutre palière, Paillasse.

0,5 Encastrement des escaliers

0,5 Définition des appuis

Analyse.

- 1,5
- Vérification de la structure
 - Lancement du calcul.
 - Type d'analyse

0,5 Résultats.

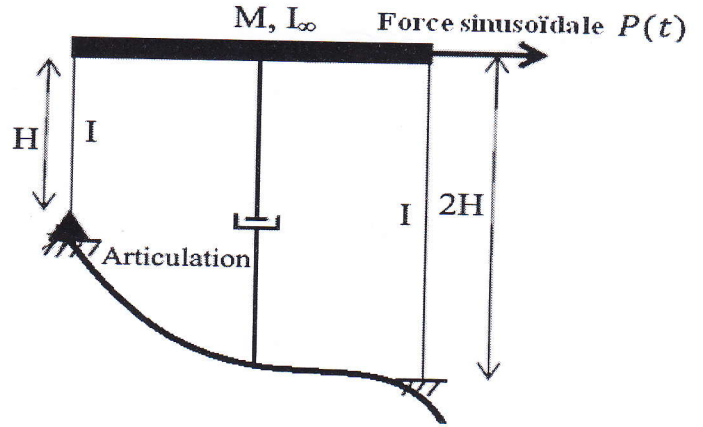


Examen (DDS)

Exercice N°1 (12 point) (Contrôle continu)

Le portique de la figure ci-dessous possède un plancher infiniment rigide, est soumis à une force sinusoïdale (harmonique) horizontale, avec une fréquence de 50Hz et une amplitude de 40 KN et une constant d'amortissement $C=10^3$ daN.s/m applique à son sommet. On a mesuré le déplacement relatif maximal en régime permanent au sommet et on a trouvé égal à 5mm.

On donne : $E=200$ GPa ; $I=1,5 \cdot 10^8$ mm⁴ ; $H=3000$ mm.

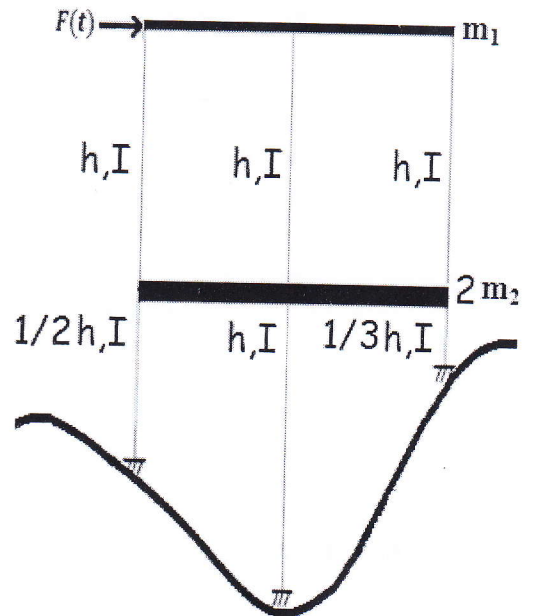


- 1- Qu'indique la solution de ce système ?
- 2- Que représente chaque terme de la solution de ce système?
- 3- Calculer la vitesse relative maximale à l'instant ($t=2s$) et déterminer la force maximale transmise à la fondation du portique.

Exercice N°2 (08 point)

Considérons le bâtiment à 2 niveaux schématisé sur la figure ci-contre, les planchers ($m_1=4t$) et ($m_2=2,2t$) sont infiniment rigides à l'effort latéral et supportés par des poteaux ($35 \times 35 \text{ cm}^2$) de hauteur d'étage est $h=4$ m avec un module de Young $E=3 \cdot 10^4$ Mpa.

- 1- Montre la matrice de rigidité et la matrice de masse du système.
- 2- Calculer la pulsation propre du système.
- 3- Déterminer la matrice modale.
- 4- En considérant que le système est excité par une force $F(t)$ = 555 N appliquée au niveau de plancher (1) sans tenir compte de l'amortissement ($\zeta=0$), calculer les valeurs généralisées du système.



Qu'indique la solution de ce système?

- La solution générale est donnée par :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [B_1 \sin(\omega_d t) + B_2 \cos(\omega_d t)] + \frac{F_0}{k_{eq}} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

2- Que représente chaque terme de la solution de ce système?

Le premier terme de cette équation constitue la réponse transitoire de l'oscillateur et le second la réponse forcée ou stationnaire (permanente) de celui-ci. En pratique, la réponse transitoire disparaît rapidement à cause du terme $e^{-\xi\omega t}$ et ne restera que la réponse en régime permanent qui caractérisera le mouvement du système.

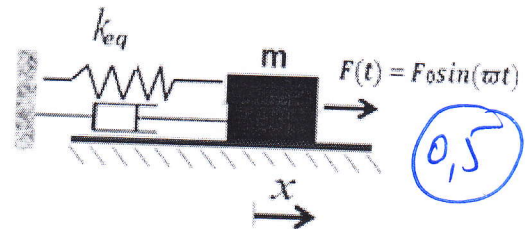
3- Calculer la vitesse relative maximale à l'instant ($t = 2$ s) et déterminer la force maximale transmise à la fondation du portique.

- La vitesse instantanée est donnée par :

$$\dot{x}(t) = e^{-\xi\omega t} [- (B_1\omega_d + B_2\xi\omega) \sin(\omega_d t) + (B_2\omega_d - B_1\xi\omega) \cos(\omega_d t)] + \frac{F_0}{k_{eq}} \frac{1-\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

- Dessiner le modèle du système fondamental masse-ressort de ce portique.

Ce système mécanique peut être modélisé par un système dynamique équivalent simple de la manière suivante :



- La rigidité équivalente de ce système K_{eq} :

En peut être exprimée par :

$$k_{Encastrement} = \frac{12EI}{(2H)^3}, \quad k_{Articulation} = \frac{3EI}{(H)^3}$$

$$k_{eq} = k_{Encastrement} + k_{Articulation} = \frac{12EI}{(2H)^3} + \frac{3EI}{(H)^3} = \frac{9EI}{2(H)^3}$$

$$k_{eq} = \frac{9EI}{2(H)^3} = \frac{9 \times 2 \cdot 10^{11} \times 150 \cdot 10^{-6}}{2(3)^3} = 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

- La pulsation de l'excitation est donnée par :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 314.16 \text{ rad/s}$$

- Le déplacement statique est : $\Delta_{st} = F_0/k_{eq} = 4 \times 10^4 / 5 \times 10^6 = 0.008 \text{ m}$

- Le déplacement maximal de la masse est donné par :

$$|x_{max}| = \Delta_{st} \cdot FAD = \Delta_{st} \cdot \left| \frac{1}{1-\beta^2} \right| = \Delta_{st} \cdot \left| \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2} \right| ; \Rightarrow \left| \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2} \right| = \frac{x_{max}}{\Delta_{st}} \Rightarrow \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2} = - \frac{|x_{max}|}{\Delta_{st}}$$

D'où :

$$\omega = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 + \frac{\Delta_{st}}{|x_{max}|}}}$$

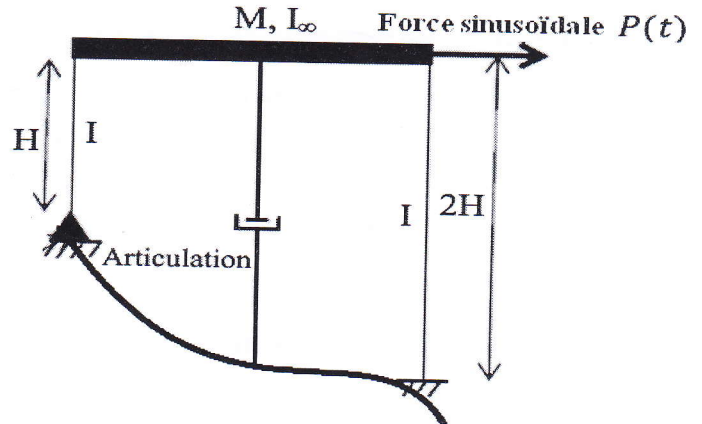
$$; \omega = \frac{314.16}{\sqrt{1 + \frac{0.008}{0.005}}} = 194.833 \text{ rad/s}$$



Examen (DDS)

Exercice N°1(12 point) (Contrôle continu)

Le portique de la figure ci-dessous possède un plancher infiniment rigide, est soumis à une force sinusoïdale (harmonique) horizontale, avec une fréquence de 50Hz et une amplitude de 40 KN et une constant d'amortissement $C=10^3$ daN.s/m applique à son sommet. On a mesuré le déplacement relatif maximal en régime permanent au sommet et on a trouvé égal à 5mm.



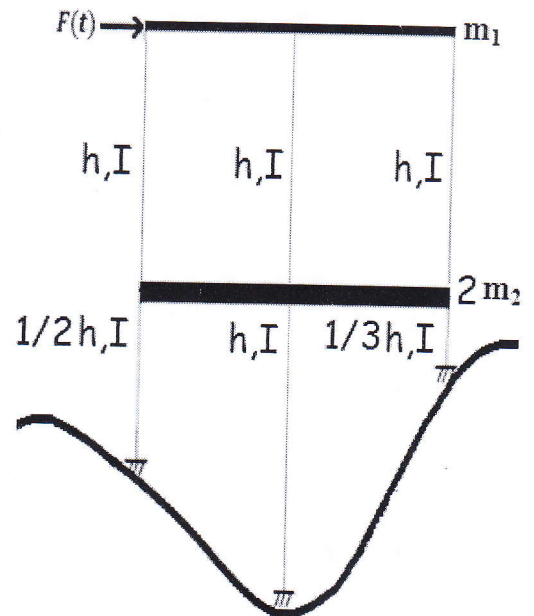
On donne : $E=200$ GPa ; $I=1,5 \cdot 10^8$ mm⁴ ; $H=3000$ mm.

- 1- Qu'indique la solution de ce système ?
- 2- Que représente chaque terme de la solution de ce système?
- 3- Calculer la vitesse relative maximale à l'instant ($t= 2s$) et déterminer la force maximale transmise à la fondation du portique.

Exercice N°2 (08 point)

Considérons le bâtiment à 2 niveaux schématisé sur la figure ci-contre, les planchers ($m_1= 4t$) et ($m_2= 2,2t$) sont infiniment rigides à l'effort latéral et supportés par des poteaux ($35 \times 35 \text{ cm}^2$) de hauteur d'étage est $h = 4$ m avec un module de Young $E = 3 \cdot 10^4$ Mpa.

- 1- Montre la matrice de rigidité et la matrice de masse du système.
- 2- Calculer la pulsation propre du système.
- 3- Déterminer la matrice modale.
- 4- En considérant que le système est excité par une force $F(t) = 555$ N appliquée au niveau de plancher (1) sans tenir compte de l'amortissement ($\zeta=0$), calculer les valeurs généralisées du système.





- Le rapport de fréquence (β) est exprimé par :

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_d} = \frac{314.16}{194.833} = 1.61;$$

- La masse de système :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k_{eq}}{m} \Rightarrow m = \frac{k_{eq}}{\omega^2} = \frac{5 \times 10^6}{(194.833)^2} = 131.71 \text{ kg}$$

- La fraction d'amortissement :

$$\xi_{cr} = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega} = \frac{10^4}{2 \times 131.71 \times 194.833} = 0.195$$

- La pulsation amortie : $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 194.833 \sqrt{1 - 0.195^2} = 191.09 \text{ rad/s}$

- L'angle de phase : $\varphi = \arctg\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right) = \arctg\left(\frac{2 \times 0.195 \times 1.61}{1 - 1.61^2}\right) = -0.39$

Les constantes B_1 et B_2 sont déterminés à partir des conditions initiales :

- $x(0) = 0 \Rightarrow B_2 + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\varphi)$

- $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B_1\omega_d - B_2\xi\omega + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \omega \cos(\varphi)$

En déduisant (φ) et $\cos(\varphi)$, on trouve :

$$x(0) = 0 \Rightarrow B_2 + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{2\xi\beta}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0;$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B_1\omega_d - B_2\xi\omega + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{(1 - \beta^2)\omega}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0;$$

D'où :

$$B_2 = - \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = - \frac{40000}{5 \times 10^6} \cdot \frac{2 \times 0.195 \times 1.61}{(1 - 1.61^2)^2 + (2 \times 0.195 \times 1.61)^2} = -1.98 \times 10^{-3}$$

$$B_1 = - \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \left[\frac{2\xi^2\beta + (1 - \beta^2)\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \frac{\omega}{\omega_d} = - \frac{40000}{5 \times 10^6} \left[\frac{2 \times 0.195^2 \times 1.61 + (1 - 1.61^2) \times 1.61}{(1 - 1.61^2)^2 + (2 \times 0.195 \times 1.61)^2} \right] \frac{194.833}{191.09}$$

$$= 11.63 \times 10^{-3}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_d t} [B_1 \sin(\omega_d t) + B_2 \cos(\omega_d t)] + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\xi\omega_d t} [-(B_1\omega_d + B_2\xi\omega) \sin(\omega_d t) + (B_2\omega_d - B_1\xi\omega) \cos(\omega_d t)] + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \omega \cos(\omega t + \varphi).$$

- Force transmise à la fondation :

$$|F_{trmax}| = F_0 \cdot \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} / 2 = 40 \times 10^3 \cdot \frac{\sqrt{1 + (2 \times 0.195 \times 1.61)^2}}{\sqrt{(1 - 1.61^2)^2 + (2 \times 0.195 \times 1.61)^2}} / 2 = 23.27 \times 10^3 \text{ N}$$



Solution exercice N°2:

1 GPa = 10^9 Pa = 10^6 N/m².

1 T = 10^3 kg.

Déterminer l'équation différentielle du mouvement de système équivalent.

a- Le modèle équivalent de système a étudiée :

On suppose que les masses(m) deux est concentrées au centre de gravité du plancher, ainsi le déplacement des 2 planchers, sera caractérisé par le déplacement (X) de son centre de gravité qui représente 2 degré de liberté, donc comportant 2 masses concentrées.

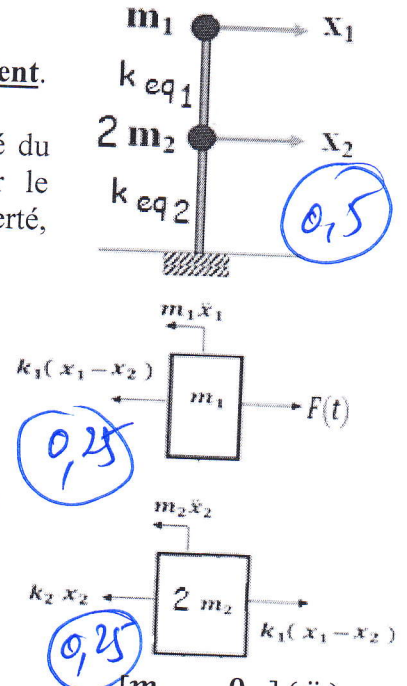
Selon la 2^{ème} loi de Newton en dynamique on trouve :

- Considérons la masse (m_1) avec le déplacement (x_1) et appliquons la relation fondamentale de la dynamique :

$m_1 \ddot{x}_1 + k_{eq1} x_1 - k_{eq1} x_2 = F(t) \dots \dots \dots$ eq n°1. 0,5

- Considérons la masse ($2m_2$) avec le déplacement (x_2) et appliquons la relation fondamentale de la dynamique :

$2m_2 \ddot{x}_2 - k_{eq2} x_1 + k_{eq2} x_2 = 0 \dots \dots \dots$ eq n°2. 0,5



Ce qui donne, après arrangement des équations, ou bien sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} k_{eq1} & -k_{eq1} \\ -k_{eq1} & (k_{eq1} + k_{eq2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$
 0,5

Cette équation peut s'écrire sous la forme : $[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$ 0,5

Déterminer la matrice de masse et de rigidité.

a- Matrice de masse :

Pour cette structure, la matrice de masse est diagonale et d'ordre 2x2
 $m_1 = 4 \text{ t} = 4000 \text{ Kg}$, et $2m_2 = 2 \times 2,2 \text{ t} = 4400 \text{ Kg}$.

$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & 2m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 4400 \end{bmatrix} \text{ Kg}$ 0,5

b- Matrice de rigidité :

On voit bien que lorsqu'on impose un déplacement unitaire de deux (2) DDL, on obtient les éléments de la colonne i de la matrice de rigidité, ainsi, la forme de la matrice [k] pour cette structure est :

$k_{eq} = \sum k_{Encastrement} = \sum \frac{12EI}{(H)^3}$; $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0,35)^4}{12} = 0,00125 \text{ m}^4$ 0,25

• $k_{eq1} = \sum k_{Encastrement} = \sum \frac{12EI}{(H)^3}$; $k_{eq1} = 3 * \frac{12EI}{(h)^3}$; $k_{eq1} = 3 * \frac{12 * 3 * 10^{10} * 0,00125}{(4)^3}$; $k_1 = 2.109 * 10^7 \frac{N}{m}$ 0,25

• $k_{eq2} = \sum k_{Encastrement} = \sum \frac{12EI}{(h)^3}$;

• $K_{eq2} = \frac{12 * 3 * 10^{10} * 0,00125}{(4)^3} + \frac{12 * 3 * 10^{10} * 0,00125}{(2)^3} + \frac{12 * 3 * 10^{10} * 0,00125}{(1,33)^3}$;

• $k_{eq2} = 25.45510^7 \frac{N}{m}$ 0,25

$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{eq1} & -k_{eq1} \\ -k_{eq1} & (k_{eq1} + k_{eq2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.109 & -2.109 \\ -2.109 & 27.564 \end{bmatrix} * 10^7 \frac{N}{m}$ 0,25



Déterminer la matrice modale.

a- Pulsations propres :

$$| [m] - \omega^2 [k] | = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} k_{eq1} & -k_{eq1} \\ -k_{eq1} & (k_{eq1} + k_{eq2}) \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & 2m_2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2.109 & -2.109 \\ -2.109 & 27.564 \end{bmatrix} * 10^7 - \omega^2 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4.4 \end{bmatrix} * 10^3 \right| = 0$$

Les valeurs propres sont les racines de cette matrice :

$$\left| \begin{bmatrix} 2.109 * 10^7 - \omega^2 4 * 10^3 & -2.109 * 10^7 \\ -2.109 * 10^7 & 27.564 * 10^7 - \omega^2 4.4 * 10^3 \end{bmatrix} \right| = 0;$$

$$(2.109 * 10^7 - \omega^2 4000) * (27.564 * 10^7 - \omega^2 4400) - (2.109 * 10^7)^2 = 0;$$

$$17.6 * 10^6 \omega^4 - 119.53 * 10^{10} \omega^2 + 53.68 * 10^{14} = 0;$$

Pour trouver les racines de cette équation, on pose : $\omega^2 = \lambda$; $\omega^4 = (\omega^2)^2 = (\lambda)^2$, et on aura une équation d'ordre 2 :

$$17.6 * 10^6 \lambda^2 - 119.53 * 10^{10} \lambda + 53.68 * 10^{14} = 0$$

Donc les racines sont :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-119.53 * 10^{10})^2 - 4(17.6 * 10^6)(53.68 * 10^{14}) = 10.50 * 10^{23};$$

$$\Delta = 10.50 * 10^{23} \geq 0 ; \sqrt{\Delta} = \sqrt{10.50 * 10^{23}} = 1.02 * 10^{12}.$$

$$\bullet \lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{119.53 * 10^{10} - 1.02 * 10^{12}}{2(-1)} ; \quad \lambda_1 = 4980.11$$

$$\bullet \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{119.53 * 10^{10} + 1.02 * 10^{12}}{2(-1)} ; \quad \lambda_2 = 62934.66$$

$$\omega^2 = \lambda \Rightarrow \sqrt{\omega^2} = \sqrt{\lambda}$$

Dont les racines sont :

$$\bullet \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{4980.11} \Rightarrow \omega = 70.57 \frac{\text{Rad}}{\text{s}}$$

$$\bullet \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{62934.66} \Rightarrow \omega = 250.86 \frac{\text{Rad}}{\text{s}}$$

Dont les racines sont :

$$\omega_1 = 70.57 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} < \omega_2 = 250.86 \frac{\text{Rad}}{\text{s}}$$

b- Vecteurs propres (modes propres) :

Les vecteurs propres sont déduits à partir de : $[[k] - \omega_i [m]] \{A\} = \{0\}$.

$$\bullet \text{ Pour } \omega_1 = 70.57 \frac{\text{Rad}}{\text{s}}, \{A^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_1 \end{Bmatrix}$$

$$[[k] - \omega_1 [m]] \{A^1\} = \{0\}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 2.109 & -2.109 \\ -2.109 & 27.564 \end{bmatrix} * 10^7 - \omega_1^2 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4.4 \end{bmatrix} * 10^3 \right| \begin{Bmatrix} 1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

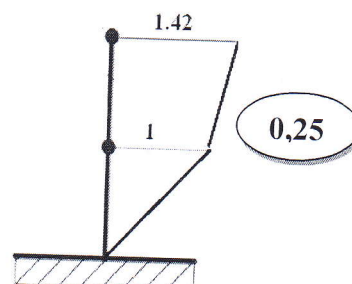
$$\Rightarrow 26.6 * 10^6 - 5.026 * 10^6 = 15.19 * 10^6 y_1$$

$$\Rightarrow y_1 = 1.42$$

Alors, le premier vecteur propre est :

$$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.42 \end{Bmatrix}$$

Ce mode de vibration peut être illustré graphiquement :



$$\bullet \text{ Pour } \omega_2 = 250.86 \frac{\text{Rad}}{\text{s}}, \{A^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$



$$[[k] - \omega_2 [m]] \{^2\} = \{0\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2.109 & -2.109 \\ -2.109 & 27.564 \end{bmatrix} * 10^7 - \omega_2^2 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4.4 \end{bmatrix} * 10^3 \begin{Bmatrix} 1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow 26.6 * 10^6 - 38.32 * 10^6 = 15.19 * 10^6 y_1$$

$$\Rightarrow y_1 = -0.77$$

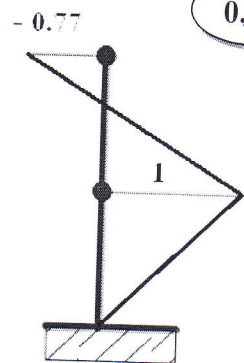
0,25

Alors, le deuxième vecteur propre est :

$$\{A^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.77 \end{Bmatrix}$$

0,25

Ce mode de vibration peut être illustré graphiquement :



0,25

Donc la matrice modale est tout simplement l'assemblage en colonnes des vecteurs propres.

$$[A] = [A^{(1)} A^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.42 & -0.77 \end{bmatrix}$$

0,25

P)

1- Calcul des valeurs généralisées

a- Masses généralisées :

$$M_i = \{^{(i)}\} [m] \{A^{(i)}\}$$

$$\bullet M_1 = \{1, 1.42\} \begin{bmatrix} 4.4 * 10^3 & 0 \\ 0 & 4 * 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.42 \end{Bmatrix} = 12.46 * 10^3 \text{ kg}$$

0,25

$$\bullet M_2 = \{1, -0.77\} \begin{bmatrix} 4.4 * 10^3 & 0 \\ 0 & 4 * 10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.77 \end{Bmatrix} = 6.77 * 10^3 \text{ kg}$$

0,25

b- Coefficients de rigidité généralisés :

$$K_i = \{^{(i)}\} [k] \{A^{(i)}\}$$

$$\bullet K_1 = \{1, 1.42\} \begin{bmatrix} 26.6 & -15.19 \\ -15.19 & 15.19 \end{bmatrix} * 10^6 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.42 \end{Bmatrix} = 14.07 * 10^6 \text{ N/m}$$

0,25

$$\bullet K_2 = \{1, -0.77\} \begin{bmatrix} 26.6 & -15.19 \\ -15.19 & 15.19 \end{bmatrix} * 10^6 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.77 \end{Bmatrix} = 58.98 \cong 60 * 10^6 \text{ N/m}$$

0,25

c- Charge généralisée :

$$(t) = \{A^{(i)}\}^T \{F(t)\}$$

$$\bullet P_1 = \{1, 1.42\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 555 \end{Bmatrix} = 788.1 \text{ N}$$

0,25

$$\bullet P_2 = \{1, -0.77\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 555 \end{Bmatrix} = -427.35 \text{ N}$$

0,25